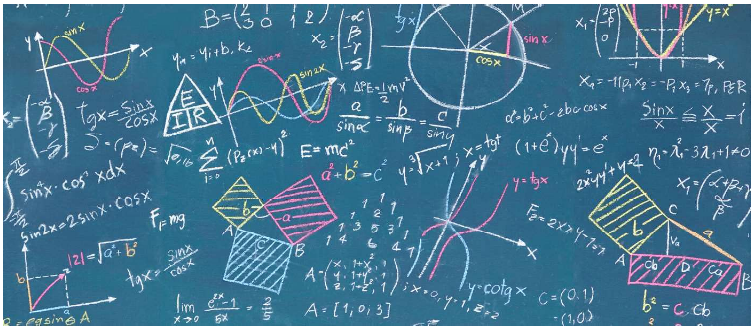
Université Des Frères Mentouri-Constantine 1
Faculté Des Sciences Exactes
Département Des Sciences De La Matière

Cours De Mathématiques 1



Mounira Melki *Année : 2023-2024*

CHAPITRE 1

LOGIQUE ET RAISONNEMENTS

Sommaire

1.1 Notions de logique

1.1.1 Assertion

Définition 1

Une assertion est une phrase soit vraie, soit fausse. Pas les deux en même temps.

Exemple 1.

1. " $2+3=5$ " est un énoncé qu'on peut jugé sans ambiguïté qu'il est vrai, donc c'est une assertion vraie.
2. " 8 est un nombre impair " est un énoncé qu'on peut jugé sans ambiguïté qu'il est faux, donc c'est une assertion fausse.
3. " Il pleuvra demain " n'est pas une assertion car on ne pourrais pas juger si cet énoncé est vrai ou faux.

Notations

► On note par P une assertion.
► On associe à chaque assertion P une valeur s'appelle "valeur de vérité" qui est vrai ou faux.
► La valeur de vérité "vrai" est notée par V et la valeur de vérité "Faux" est notée par F. Et on résume ceci dans une table s'appelle "table de vérité" de l'assertion P.

P
V
F

À partir d'une assertion ou plusieurs assertions, on peut construire d'autres. Autrement dis, à partir des assertions initiales, on peut définir de nouvelles assertions au moyen de connecteurs logiques comme : la négation, la conjonction, la disjonction, l'implication et l'équivalence.

1.1.2 Connecteurs logiques

Soient P et Q deux assertions.

Négation

La négation de l'assertion P est l'assertion notée $\overline{P}$ ou $\rceil P$ ou non P qui est vraie quand P est fausse et qui est fausse quand P est vraie. La notation $\overline{P}$ se lit "pé barre" et les notations $\rceil P$ et non P se lisent "non pé". La table de vérité de l'assertion $\overline{P}$ est donc donnée par :

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

Conjonction

La conjonction de deux assertions P, Q est l'assertion notée $P \wedge Q$ ou "P et Q" qui n'est vraie que si P et Q sont vraies toutes les deux. La table de vérité de l'assertion $P \wedge Q$ est donc donnée par :

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disjonction

La disjonction de deux assertions P, Q est l'assertion notée $P \vee Q$ ou "P ou Q" qui n'est fausse que si P et Q sont fausses toutes les deux. La table de vérité de l'assertion $P \vee Q$ est donc donnée par :

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Implication

L'implication de P par Q est l'assertion notée $P \Longrightarrow Q$ qui n'est fausse que si P est vraie et Q est fausse. La notation $P \Longrightarrow Q$ se lit "P implique Q".
L'implication $Q \Longrightarrow P$ s'appelle la réciproque de $P \Longrightarrow Q$.
L'implication $\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$ s'appelle la contraposée de $P \Longrightarrow Q$.
La table de vérité de l'assertion $P \Longrightarrow Q$ est donc donnée par :

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Équivalence

L'équivalence de deux assertions P et Q est l'assertion notée $P \Longleftrightarrow Q$ qui n'est vraie que si P et Q sont vraies simultanément ou fausses simultanément. La notation $P \Longleftrightarrow Q$ se lit "P est équivalent à Q".
La table de vérité de l'assertion $P \Longleftrightarrow Q$ est donc donnée par :

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemple 2.

1. La négation de l'assertion fausse " $3 < 2$ " est l'assertion vraie " $3 \geqslant 2$ ".
2. La négation de l'assertion vraie "8 est un nombre pair "est l'assertion fausse "8 est un nombre impair".
3. L'assertion "$2^4 = 16$ et $4^2 = 16$" est vraie car les deux assertions "$2^4 = 16$" et "$4^2 = 16$" sont vraies toutes les deux.

4. L'assertion "$8 > 8$ ou $8 \neq 8$" est fausse car les deux assertions "$8 > 8$" et "$8 \neq 8$" sont fausses toutes les deux.
5. L'assertion "$4^2 + 3^2 = 5^2 \Longrightarrow 5 = 5$" est vraie car les deux assertions "$4^2 + 3^2 = 5^2$" et "$5 = 5$" sont vraies.
6. L'assertion "3 est premier$\Longleftrightarrow$ 2 est pair" est vraie car les deux assertions "3 est premier" et "2 est pair" sont vraies simultanément.

1.1.3 Propriétés

Soient P et Q deux assertions, on a :

1. $P \Longleftrightarrow P$.
2. $\overline{\overline{P}} \Longleftrightarrow P$.
3. $\left.\begin{array}{c} P \wedge Q \Longleftrightarrow Q \wedge P \\ P \vee Q \Longleftrightarrow Q \vee P \end{array}\right\}$ Commutativité.
4. $\left.\begin{array}{c} \overline{P \wedge Q} \Longleftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q} \\ \overline{P \vee Q} \Longleftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q} \end{array}\right\}$ Sont appelées "Lois de Morgan".
5. $P \Longrightarrow Q \Longleftrightarrow \overline{P} \vee Q$.
6. $\overline{P \Longrightarrow Q} \Longleftrightarrow P \wedge \overline{Q}$.
7. $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow \left(\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}\right)$.
8. $(P \Longleftrightarrow Q) \Longleftrightarrow [(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)]$.

1.1.4 Quantificateurs

Une assertion P peut dépendre d'un paramètre x par exemple "$x^2 \geqslant 5$ ". L'assertion $P(x)$ est vraie ou fausse selon les valeurs de x.

Quantificateur Universel

Si les assertions $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x de l'ensemble non-vide E.
On écrit "$\forall x \in E : P(x)$" qui se lit comme suit : "pour tout x appartenant à E, $P(x)$ est vraie".
Le symbole $\forall$ s'appelle "quantificateur universel".

Quantificateur Existentiel

S'il existe au moins un élément x de E tel que $P(x)$ est vraie. On écrit :"$\exists x \in E : P(x)$" qui se lit comme suit : "il existe au moins un élément x dans E, tels que $P(x)$ soit vraie".
Le symbole $\exists$ s'appelle "quantificateur existentiel". Il convient également à signaler le quantificateur "d'existence et d'unicité", noté par $\exists!$.
On écrit "$\exists! x \in E : P(x)$" si nous voulons dire qu'il existe un unique élément x de E qui vérifie $P(x)$.

Exemple 3.

1. L'assertion "$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geqslant 0$" est vraie car pour tout réel x, on a : x^2 est positif.
2. L'assertion "$\exists x \in \mathbb{R} : x - 3 > 0$" est vraie car si on prends par exemple $x = 5$, on a : $5 - 3 = 2 > 0$.
3. L'assertion" $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -1$" est fausse car aucun réel au carré ne donnera un nombre négatif.
4. L'assertion "$\exists! x \in \mathbb{R} : x + 1 = 0$" est vraie car on a une seule solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x + 1 = 0$ qui est : $x = -1$.

Négation des quantificateurs

1. La négation de "$\forall x \in E : P(x)$" est "$\exists x \in E : \overline{P(x)}$".
2. La négation de "$\exists x \in E : P(x)$" est "$\forall x \in E : \overline{P(x)}$".

Exemple 4

1. La négation de l'assertion "$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geqslant 0$" est :
   "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$".
2. La négation de l'assertion "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 9 = 0$" est :
   "$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 9 \neq 0$".
3. Ce n'ait pas difficile d'écrire la négation d'une phrase complexe. Pour l'assertion : "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y > 0 : (x + y \ > \ 20)$", sa négation est : "$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y > 0 : (x + y \ \leqslant \ 20)$".

Remarque 1.
L'ordre des quantificateurs est trés important.
Par exemple les deux phrases logiques :
"$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : (x + y \ > 0)$" et "$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : (x + y \ > 0)$" sont différentes (n'ont pas la même signification).
La première est vraie et la seconde est fausse. En effet, pour la première, pour tout réel x, il existe un réel y (qui peut donc dépendre de x) tel que : $x + y > 0$. On peut prendre par exemple : $y = 1 - x$, donc c'est une assertion vraie. Par contre, la deuxième se lit : "il existe un réel y tel que tout réel x, $x + y > 0$". Cette assertion est fausse, cela ne peut être le même y qui convient pour tout les x. .

1.2 Types de raisonnements

Il est important de trouver un moyen ou une méthode pour répondre à un certain problème, pour cela on s'inspire à quelques techniques ou raisonnements. Voici quelques méthodes classiques du raisonnement.

1.2.1 Raisonnement direct

L'énoncé d'un résultat est souvent de la forme $P \Longrightarrow Q$ (des hypothèses impliquent une conclusion). D'aprés la table de vérité de l'implication, pour montrer que $P \Longrightarrow Q$ est vraie, il suffit de montrer que si P est une assertion vraie alors l'assertion Q est vraie aussi.
En pratique, on suppose que P soit vraie et au terme d'un raisonnement, on montre que Q est vraie.

Exemple 1. Montrer que : $\forall\ a\ ,\ b \in \mathbb{R} : (a = b \Longrightarrow \frac{a+b}{2} = b)$.
Démonstration :
Supposons que : $\forall a, b \in \mathbb{R} : a = b$ et montrons que : $\frac{a+b}{2} = b$.
On a :

$$\begin{aligned} a = b &\Longrightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{2}. \\ &\Longrightarrow \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{b}{2} + \frac{b}{2}. \\ &\Longrightarrow \frac{a+b}{2} = b. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : (a = b \Longrightarrow \frac{a+b}{2} = b).$$

1.2.2 Raisonnement par contraposée

Pour prouver une implication $P \Longrightarrow Q$, il est équivalent de montrer l'implication $\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$ (la contraposée de $P \Longrightarrow Q$). On suppose alors $\overline{Q}$ soit vraie et on montre que $\overline{P}$ est vraie. L'intérêt d'utiliser cette méthode réside dans le fait que dans de nombreux cas la contraposée d'une implication est plus facile à prouver que l'implication

Exemple 2. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que si n^2 est pair alors n est pair.
Démonstration : On cherche à montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : n^2 est pair$\Longrightarrow n$ est pair. En fait, le raisonnement direct de cette implication est trés difficile. Pour ce motif, on va montrer par la contraposée. On suppose que n est impair et on montre que n^2 est impair. On a :

$$\begin{aligned} n \text{ est impair} &\Longrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k+1. \\ &\Longrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n^2 = (2k+1)^2. \\ &\Longrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n^2 = 4k^2+4k+1. \\ &\Longrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n^2 = 2\left(2k^2+2k\right)+1. \\ &\Longrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n^2 = 2k^{'}+1\left(\text{avec } k^{'} = 2k^2+2k\right). \\ &\Longrightarrow n^2 \text{ est impair.} \end{aligned}$$

En définitive :

$$\text{Si } n^2 \text{ est pair alors } n \text{ est pair.}$$

1.2.3 Raisonnement par contre-exemple

Ce raisonnement sert à montrer qu'une assertion de la forme :
"$\forall x \in E : P(x)$" est fausse. Pour celà, on montre que sa négation est vraie.

$$\overline{\forall x \in E : P(x)} \equiv \exists x \in E : \overline{P(x)}$$

On cherche un élément x de E pour lequel $\overline{P(x)}$ est vraie.
Notons que l'élément x qu'on va cherché de E pour lequel $P(x)$ soit fausse est considéré comme exemple de l'assertion"$\exists x \in E : \overline{P(x)}$" et comme étant contre-exemple de l'assertion"$\forall x \in E : P(x)$" .

Exemple 3. Montrer que : "$\forall n \in \mathbb{N} : n^2+1$ est premier" est fausse.
Démonstration : Pour montrer que cette assertion est fausse, il faut montrer que sa négation "$\exists n \in \mathbb{N} : n^2+1$ n'est pas premier"est vraie.
En effet, $\exists n = 3 \in \mathbb{N} : 3^2+1 = 10$ n'est pas premier.
Conclusion :
L'assertion "$\forall n \in \mathbb{N} : n^2+1$ est premier"est fausse.

1.2.4 Raisonnement par récurrence

Ce raisonnement est utilisé pour montrer qu'une assertion qui dépends d'un nombre naturel n qu'elle est vraie pour tous les nombre naturels n à partir d'un certain rang n_0 où n_0 désigne un entier pas nécessairement égale à 0. La démonstration se déroule en trois étapes :
Initialisation : On vérifie que $p(n_0)$ est vraie.
Héridité : Fixons $n \geqslant n_0$, supposons que $p(n)$ est vraie et montrons que $p(n+1)$ est vraie.
Conclusion : Par le principe de récurrence $p(n)$ est vraie pour tout n.

Exemple 4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : 2^n > n$.
Démonstration : Pour $n \geqslant 0$, on note $p(n)$ l'assertion suivante : $2^n > n$. Montrons que :$\forall n \in \mathbb{N} : p(n)$ est vraie.

Initialisation : vérifions $p(0)$. On a : pour $n = 0$, $2^0 = 1 > 0$, d'où $p(0)$ est vraie.
Héridité : Fixons $n \geqslant 0$, supposons que $p(n)$ est vraie, c'est à dire $2^n > n$ et montrons que $p(n+1)$ est vraie, c'est à dire $2^{n+1} > n+1$.
On a :

$$2^{n+1} = 2^n \times 2 = 2^n + 2^n.$$

Or, d'aprés l'hypothèse on a :

$$2^n > n.$$

D'où :

$$2^{n+1} = 2^n + 2^n > 2^n + n.$$

D'autres part, on a :

$$n \geqslant 0 \Longrightarrow 2^n \geqslant 2^0 , \ (2^0 = 1).$$

Ainsi :

$$2^{n+1} > n+1.$$

Conclusion :
Par le principe de récurrence, on déduit que : $\forall n \in \mathbb{N} : p(n)$ est vraie, c'est à dire :

$$\forall n \in \mathbb{N} : 2^n > n.$$

TD N°1 : Logique et Raisonnements

Exercice 1.

En utilisant la table de vérité, montrer les "lois de Morgan" :

1. $\overline{P \wedge Q} \Longleftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$.
2. $\overline{P \vee Q} \Longleftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$.

Exercice 2.

• Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier vos réponses.

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$: $x + y > 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$: $x + y > 0$.
3. $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$: $y^2 > x$.
4. $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$: $x + y > 0$.

• Donner leur négation.

Exercice 3 (Raisonnement par récurrence)**.**

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ , } \forall x > 0 \text{ , } (1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$